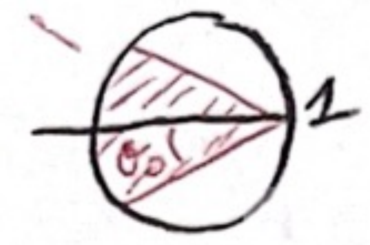
Abel Angulaire et Taubérien Faible

Bernis p 51

Théorème d'Abel Angulaire. Soit $\sum a_n z^n$ une serie entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. et de somme notée f. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Associons lui le domaine angulaire $\Delta_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta} \middle| \begin{smallmatrix}\rho > 0 \\ \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\end{smallmatrix}\right\} \cap D(0,1)$

Si $\sum a_n$ converge alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$



Preuve : Supposons que $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ converge. On note S et S_n, R_n la somme partielle et le Reste.

On constate que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = R_{n-1} - R_n$. $\forall N \in \mathbb{N}^*$ et $\forall z \in D(0,1)$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^{N+1} - 1) + 0 = (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n - R_N (z^{N+1} - 1)$$

Or $R_N (z^{N+1} - 1) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ car $R_N \to 0$ et $|z^{N+1} - 1| \leq 2$

Donc lorsque $N \to +\infty$, on a $\forall z \in D(0,1)$ $f(z) - S = (z-1) \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n z^n$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\sum a_n$ CV, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|R_n| \leq \varepsilon$

Donc $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z) - S| \leq |z-1| \sum\limits_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon |z-1| \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} |z|^n \leq |z-1| \sum\limits_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$

En posant $\eta = \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + 1}$ on a $\forall z \in D(0,1)$ tel que $|z-1| \leq \eta \Rightarrow |z-1| \sum\limits_{n=0}^{n_0} |R_n| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow |f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Si de plus $z \in \Delta_{\theta_0}$, alors $\exists \rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$

D'où $|z|^2 = z\bar{z} = 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2$

Donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|(1+|z|)}{1-|z|^2} = \frac{\rho\,(1+|z|)}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2} \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho}$.

Si $\rho = |z-1| \in \,]0, \cos(\theta_0)[$, alors $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}$ car $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \cos(\theta_0) > 0$.

Au final, si $|z-1| \leq \min(\eta, \cos(\theta_0))$

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} = \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$$

Théorème Tauber Faible : Soit $\sum a_n z^n$ une serie entiere de rayon de convergence 1.
On note f sa somme sur $D(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$
Si $\lim n a_n = 0$ alors $\sum a_n$ converge vers S

Preuve : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ $\forall x \in]0,1[$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$.

Or $\forall x \in]0,1[$, $1 - x^n = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \leq n(1-x)$ et comme $n|a_n| \to 0$

alors $$\left|\sum_{n=N+1}^{h} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{h} \frac{n}{N}|a_n| x^n \leq \sup_{h>n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}$$

quand $h \to +\infty$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{N}|a_n| x^n \leq \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}$$

Donc $\forall x \in]0,1[$ et $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $$|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}$$

En particulier, $$\left|S_N - f\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup(n|a_n|)$$

Comme $n|a_n| \to 0$ on a $\sup(n|a_n|) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

et le Thm de Cesaro $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Donc $S_N \to S$ par IT

Donc $\sum a_n$ converge vers S.